Define-se função polinomial do 2º grau, ou função quadrática, toda função expressa na forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Os números reais a, b e c, sendo $a \neq 0$, são denominados coeficientes da função, enquanto x e y são as variáveis.

Exemplo:
1) Identifique os termos a, b e c da função $y = x^2 - 5x + 3$.
Solução: a = 1, b = -5 e c = 3.

Raízes (ou zeros) da função: as raízes de uma função quadrática são os valores de x que tornam y = 0. Dependendo do valor do discriminante, a função pode ter 2 raízes reais, uma única raiz real (raiz dupla) ou nenhuma raiz real. O discriminante, representado pela letra grega Δ (delta), é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para Δ > 0, temos 2 raízes reais e distintas. Se Δ = 0, temos uma única raiz real (ou duas raízes reais e iguais). E, quando Δ < 0, a função não possui raiz real.

As raízes podem ser obtidas pela fórmula resolutiva (popularmente conhecida no Brasil como "fórmula de Bhaskara", embora seu desenvolvimento seja atribuído a matemáticos como Euclides e Al-Khwarizmi, entre outros):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Alternativamente, quando as raízes são reais, podem ser encontradas pelas relações de soma (S) e produto (P) de suas raízes:

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad \text{e} \quad P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Exemplos:
1) Determine o valor de x nas funções:
a) $y = x^2 - 7x + 10$ **b)** $y = x^2 - 6x + 9$ **c)** $y = x^2 - 6x + 10$

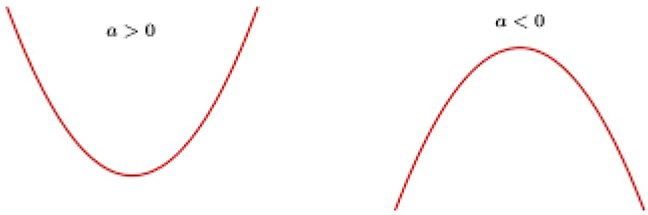
*Respostas: **a)**2ou5 **b)**3 **c)**ø*

Gráfico: o gráfico da função quadrática é uma curva chamada parábola.

Coeficiente a: indica a concavidade do gráfico de uma função quadrática, ela pode ser voltada para cima ou para baixo, conforme o sinal do coeficiente a:

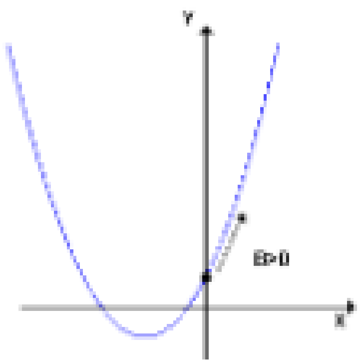
a > 0 concavidade voltada para cima

a < 0 concavidade voltada para baixo

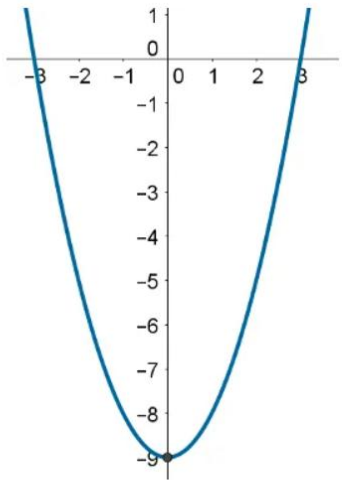


O coeficiente a também é responsável pela “abertura” da parábola. Quanto maior o valor do seu módulo, menor será a abertura.

Coeficiente b: indica a inclinação que a parábola toma após passar pelo eixo vertical (y). Seguindo a parábola da esquerda para a direita, se após o ponto de corte do eixo y, a parábola sobe, então b é positivo. E, se a parábola desce, b é negativo. Na imagem a seguir, temos que o termo b é positivo, pois acompanhando a curva iremos subir após o ponto de corte.

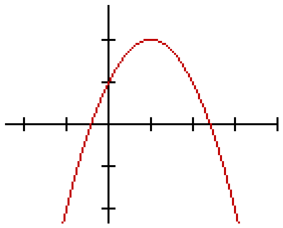


Coeficiente c: sempre representará o ponto de encontro do eixo y com a parábola. É possível notar isso fazendo x = 0 em uma função quadrática. Como exemplo, temos o gráfico da função f(x) = x² – 9 representado a seguir.



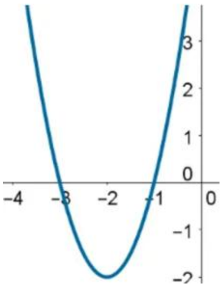
Exercícios da aula:

1) A representação cartesiana da função $y = ax^2 + bx + c$ é a parábola abaixo. Tendo em vista esse gráfico, podemos afirmar que:



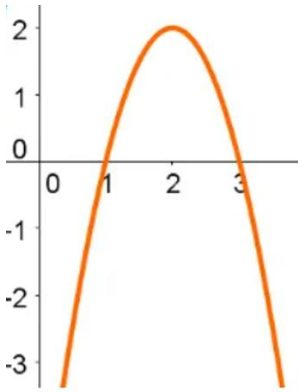
(A)a<0, b<0 e c>0
(B)a>0, b>0 e c<0
(C)a>0, b>0 e c>0
(D)a<0, b>0 e c<0
(E)a<0, b>0 e c>0

2) Sobre a função f(x) = ax² + bx + c, representada no gráfico abaixo, a afirmativa correta é:



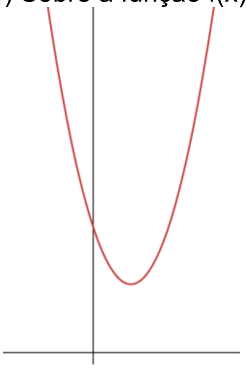
(A)a<0, b<0 e c>0
(B)a>0, b>0 e c<0
(C)a>0, b>0 e c>0
(D)a<0, b>0 e c<0
(E)a<0, b>0 e c>0

3) A representação cartesiana da função $y = ax^2 + bx + c$ é a parábola abaixo. Tendo em vista esse gráfico, podemos afirmar que:



(A)a<0, b<0 e c>0
(B)a>0, b>0 e c<0
(C)a>0, b>0 e c>0
(D)a<0, b>0 e c<0
(E)a<0, b>0 e c>0

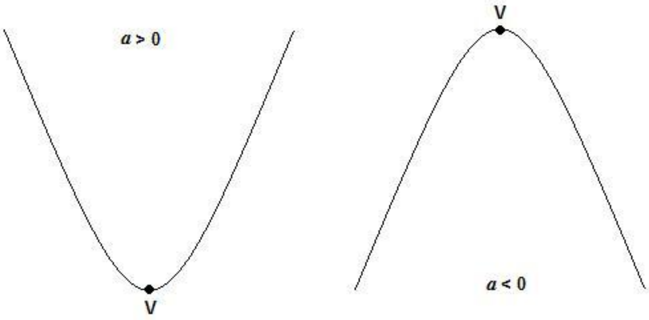
4) Sobre a função f(x) = ax² + bx + c, representada no gráfico abaixo, a afirmativa correta é:



(A)a<0, b<0 e c>0
(B)a>0, b<0 e c>0
(C)a>0, b>0 e c>0
(D)a<0, b>0 e c<0
(E)a<0, b>0 e c>0

Respostas: 1)E 2)C 3)D 4)B

<u>Vértice (V)</u>: toda parábola possui um ponto de máximo ou de mínimo absoluto, chamado de vértice. Esse é o ponto onde a função quadrática deixa de ser crescente e passa a ser decrescente (ou vice-versa), dependendo da concavidade da parábola, conforme ilustrado nas imagens abaixo.



As coordenadas do vértice são dadas por:

$$\boldsymbol{x_v = \frac{-b}{2a}} \quad \textbf{e} \quad \boldsymbol{y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$$

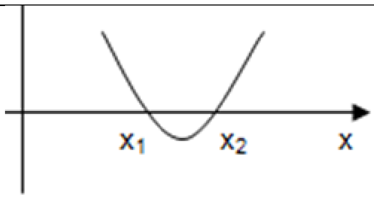
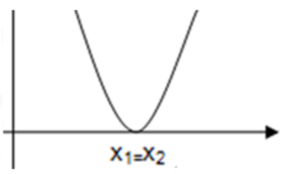
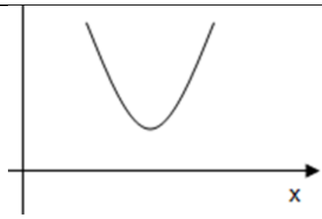
Assim, toda função quadrática apresenta um intervalo de crescimento e um de decrescimento, separados pelo vértice na coordenada (Xv).

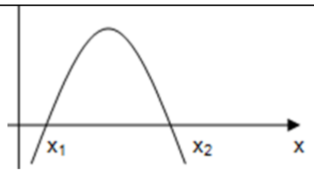
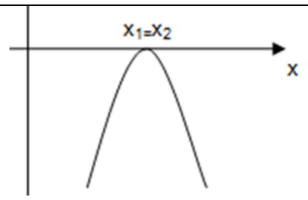
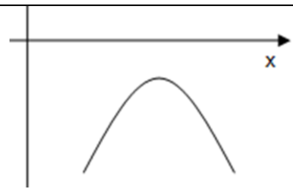
<u>**Exemplos**</u>:
1) Calcule as coordenadas do vértice da função y = x² + x – 6.

2) O jogador Amiel arremessa a bola de basquete em direção à cesta, descrevendo uma trajetória parabólica, conforme a função $\boldsymbol{h(t)} = \boldsymbol{2 + 6t - 5t^2}$, sendo h a altura da bola, em metros, e t o tempo decorrido do arremesso, em segundos. A altura máxima, em metros, atingida pela bola em relação ao piso é:

*Respostas: **1)**$x_v = \frac{-1}{2}$ e $y_v = \frac{25}{4}$ **2)**3,8 m.*

<u>***Tipos de Gráficos***</u>: o gráfico de uma função quadrática intercepta ("corta") o eixo x nos pontos correspondentes às raízes da função (quando existem) e intercepta o eixo y no ponto (0, c), ou seja, no valor do termo independente c. Quanto ao formato, a parábola pode apresentar as seguintes variações, dependendo do discriminante Δ e do coeficiente a:

		
Se a > 0 e Δ > 0	Se a > 0 e Δ = 0	Se a > 0 e Δ < 0

 Se a < 0 e Δ > 0	 Se a < 0 e Δ = 0	 Se a < 0 e Δ < 0

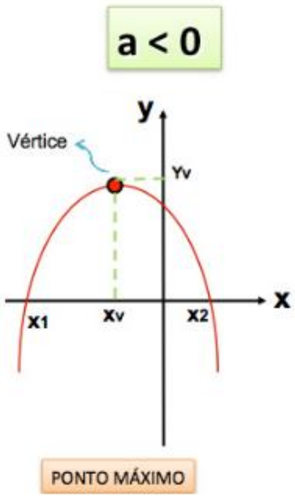
Construção de Gráficos: para construir gráficos, utilizamos o plano cartesiano, formado por dois eixos perpendiculares: o eixo horizontal das abscissas (x) e o eixo vertical das ordenadas (y). Ambos são retas infinitas. A partir dessa estrutura, determinamos pontos por meio de suas coordenadas (x, y) e os conectamos com uma linha contínua, obtendo o traçado característico da função estudada.

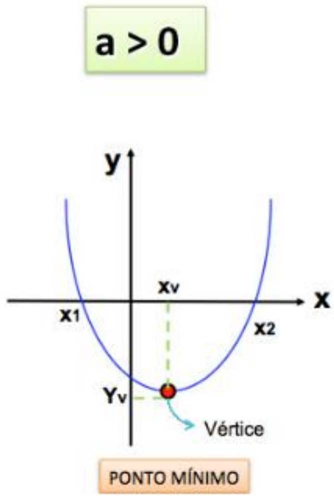
Exemplos:

1) Construa os gráficos das funções:

a) $y = x^2 - 2x - 8$ b) $y = -x^2 + 6x - 9$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

Pontos críticos (Yv): os valores que a variável y pode assumir em uma função quadrática são limitados pelo vértice, que define o valor extremo da função. Quando a concavidade é voltada para cima (a > 0), o vértice é o ponto de mínimo, e yv é o menor valor atingido. Quando a concavidade é voltada para baixo (a < 0), o vértice é o ponto de máximo, e yv é o maior valor atingido.





Exemplos:

1) Determine os pontos críticos das funções:

a) $y = x^2 - 8x + 15 = 0$ **b)** $y = -x^2 + 2x + 3$

Determinação de uma função quadrática: a expressão algébrica da função quadrática é $y = ax^2 + bx + c$. Para obtermos essa expressão conhecendo suas raízes, podemos calcular a soma (S) e o produto (P) delas e substituir em:

$$y = x^2 - Sx + P$$

Exemplo:

1) Obtenha a expressão algébrica da função quadrática que possui raízes 1 e 3.

Solução: para as raízes 1 e 3, temos S = 4 e P = 3. Substituindo em $y = x^2 - Sx + P$, temos a função $y = x^2 - 4x + 3$.